

Eine strukturalistische Rekonstruktion der frühen Quantenelektrodynamik – formalistische Thesen vs. physikalische Deutung

Martin Rotter

Zusammenfassung:

Ein bisher in der wissenschaftstheoretischen Diskussion wenig beachtetes Gebiet der modernen Physik ist die sogenannte Quantenelektrodynamik (*QED*). Aufgrund ihrer ontologischen Herausforderungen nimmt sie eine besondere Stellung innerhalb der Forschungsprogramme sowohl der Quantenfeldtheorie (*QFT*) als auch der S-Matrix-Theorie (*SMT*) ein, was innerhalb des strukturalistischen Ansatzes diskutiert werden soll.¹

Als erste Theorie, welche dem Forschungsprogramm der *QFT* zugerechnet wird, kann man die sogenannte Diracsche Strahlungstheorie (*DST*) identifizieren, die 1927 von Paul Dirac entwickelt wurde. Innerhalb der *DST* werden dabei grundlegende Begriffe gebildet, die für das gesamte Forschungsprogramm der *QFT* eine entscheidende Rolle spielen, insbesondere für die Entwicklung der *QED*. Charakteristisch für Theorieelemente der *QFT* ist, daß Zustände von quantenphysikalischen Systemen beschrieben werden, die unendlich viele Freiheitsgrade besitzen. Dies ist auch das wesentliche Kriterium, das eine Abgrenzung der *QFT* zur Quantenmechanik erlaubt.

Parallel zum Forschungsprogramm der *QFT* wurde Anfang der 1940er Jahre von Werner Heisenberg das Forschungsprogramm der *SMT* eingeleitet. Die Intention dieses Programms ist darin zu sehen, daß man auf einer positivistischen Grundlage eine Theorie bildet, die Wechselwirkungsprozesse zwischen Partikeltypen systematisiert und erklärt. Als zentrale Entität wird dabei die sogenannte Streu-Matrix (S-Matrix) identifiziert, die alle notwendigen Informationen über elastische oder inelastische Streuprozesse enthält. Dies ermöglicht eine Erklärung verschiedener Arten von Reaktionen, die zwischen Partikeln eines bestimmten Typs ablaufen können.

1. Historische Einführung in die Forschungsprogramme der Quantenfeldtheorie (*QFT*) und der S-Matrix Theorie (*SMT*)

Anfänge der Feldquantisierung schließen an Plancks Theorie der Hohlraumstrahlung, die 1900 entwickelt wurde, an. Einstein konnte 1909 zeigen, daß sich aus der Analogie von Strahlung und materiellem Molekülgas ein Schwingungsgesetz für die Energie idealer Gase ableiten läßt. Für die Diskussion um den Welle-Teilchen-Dualismus war die Bemühung um eine Quantentheorie der Strahlung wichtiger als die Herausarbeitung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden in der Beschreibung von Licht und Mate-

rie. Ansätze für eine ausgearbeitete Quantenfeldtheorie (*QFT*) findet man bei Born, Heisenberg und Jordan², die aus Analogieüberlegungen zwischen Lichtwellen und harmonischen Oszillatoren die Energieschwankung in der Hohlraumstrahlung bestätigen konnten. Eine erste Theorie der Wechselwirkung von Strahlung und Materie stammt von Paul Dirac, indem er eine bestimmte Quantisierungsmethode für die Felder verwendete. Die entsprechenden Feldgrößen werden dabei durch Operatoren charakterisiert. Ziel eines derartigen Ansatzes ist eine relativistisch invariante Quantentheorie der klassischen Elektrodynamik, die Wechselwirkungen mit geladenen Partikeln berücksichtigt.

Bis zu Bohrs Atomtheorie von 1913 hatte man es mit physikalischen Systemen zu tun, die mit den gewohnten Modellen der Raum-Zeit verträglich waren. Gerade in der deutschen Wissenschaft kam dieser visuellen Vorstellung ein großer Realitätsstatus zu, der unter dem Begriff „Gewöhnliche Anschauung“ bekannt ist.³ Die Gewöhnliche Anschauung ist dabei die visuelle Vorstellung, die von bestimmten Phänomenen abstrahiert wird. Besonders in der Zeit von 1923 bis 1927 wurde die Gewöhnliche Anschauung von Physikern wie Bohr, Heisenberg, Pauli und Schrödinger viel diskutiert, wenn es darum ging, diese aus Phänomenen zu abstrahieren, die der Quantenmechanik zugerechnet wurden. Die Gewöhnliche Anschauung ist eng verbunden mit den deterministischen Gesetzen der Klassischen Mechanik. Folglich kann die raumzeitliche Entwicklung jedes physikalischen Systems mit großer Genauigkeit beschrieben werden. Dabei nimmt man an, daß die Begrenzung der Meßgenauigkeit nicht intrinsisch bzgl. der Phänomene ist, sondern sie wird als systematischer Meßfehler interpretiert, der im Idealfall eliminiert werden kann.

Bei Untersuchungen zur Wechselwirkung zusammengesetzter physikalischer Systeme führte Heisenberg 1943 als erster den Begriff einer Streumatrix (S-Matrix) zur Beschreibung der Zustände gestreuter Partikel ein. Anfang der 1940er Jahre hatte Heisenberg die Überzeugung, daß für eine Theorie der Elementarteilchen eine fundamentale Länge notwendig sei. Deshalb skizzierte er eine Interimstheorie, die als S-Matrix Theorie (*SMT*) bezeichnet wird.

Die bekannten Divergenzschwierigkeiten in der Theorie der Elementarteilchen zeigen, daß die zukünftige Theorie in ihren Grundlagen eine universelle Konstante von der Dimension einer Länge enthalten wird, die in die bisherige Form der Theorie offenbar nicht widerspruchsfrei eingebaut werden kann. Im Hinblick auf diese spätere Abänderung der Theorie versucht die vorliegende Arbeit, aus dem Begriffsgebäude der Quantentheorie der Wellenfelder diejenigen Begriffe herauszuschälen, die von der zukünftigen Änderung wahrscheinlich nicht betroffen werden und die daher einen Bestandteil auch der zukünftigen Theorie bilden werden. [...] In den vergangenen Jahren ist vielfach auf die Schwierigkeiten hingewiesen worden, die einer

Theorie der Elementarteilchen einstweilen noch im Wege stehen. Diese Schwierigkeiten zeigen sich am auffallendsten in dem Auftreten von Divergenzen (unendliche Selbstenergie des Elektrons, unendliche Polarisierung des Vakuums u. dergl.), die den Ausbau einer mathematisch geschlossenen Theorie verhindern, und müssen wohl als Ausdruck der Tatsache aufgefaßt werden, daß bei den in Rede stehenden Erscheinungen eine neue universelle Konstante von der Dimension einer Länge eine entscheidende Rolle spielt, die in den bisherigen Theorien nicht berücksichtigt wird.⁴

Dieses Vorgehen war weitgehend aus theoretischen Überlegungen motiviert, um sog. Divergenzen, also „Unendlichkeiten“ der *QFT* zu beseitigen, welche die Anerkennung der *QFT* als empirische Theorie zu dieser Zeit erschwerten. Der Unterschied zu „modernen“ S-Matrix Konzeptionen besteht darin, daß Heisenberg von der Notwendigkeit einer „fundamentalen Länge“ überzeugt war. Neben den Schwierigkeiten, mit denen das Forschungsprogramm der *QFT* aufgrund empirischer Erkenntnisse Ende der 1930er Jahre zu kämpfen hatte, entstanden die frühen Entwicklungen der *SMT* vor allem aus theoriebezogenen Überlegungen. Die Bedeutung dieses Forschungsprogramms für die konsequente Weiterentwicklung der theoretischen Elementarteilchenphysik liegt vor allem in folgenden Punkten:

Eine der Schwierigkeiten bestand in der Einbindung der Kausalität eines Streuvorgangs in die *SMT*. Ein anderes Problem war, welche Arten der Beschränkung die Einführung des Begriffs der Kausalität bezüglich der formalen Struktur der Streuamplituden haben könnten. Über die Streuamplituden können nämlich Voraussagen über die Wirkungsquerschnitte gemacht werden, welche experimentell ermittelt werden können. Als letzte Beschränkung schließlich ist es von Interesse, inwiefern die Ergebnisse der Streuexperimente Rückschlüsse darauf zulassen, welcher Typ der Wechselwirkung zwischen den gestreuten Partikeln stattgefunden hat.

Heisenbergs Intention lag darin, einen Begriff der S-Matrix zu entwickeln, um eine alternative Theorie zur *QFT* zu erhalten, indem er eine Theorie anstrebte, die von Grundbegriffen der *QFT* unabhängig war. Er nahm damit einen positivistischen Standpunkt ein, weil seine Theorie nur von beobachtbaren Größen abhängen sollte und jeden Bezug auf Begriffe wie Hamiltonoperator oder Bewegungsgleichung vermied. Allerdings besteht zwischen Theorieelementen der *QFT* und der *SMT* eine intertheoretische Relation folgender Art: Ist nämlich innerhalb der *QFT* der Hamiltonoperator für ein bestimmtes System gegeben, kann dadurch die S-Matrix determiniert werden.

Eine der wichtigsten Eigenschaften, die von der S-Matrix gefordert wird, ist die Unitarität, um Wahrscheinlichkeitsaussagen über mögliche Streuvorgänge zu ermöglichen. Bemerkenswert ist ebenfalls, daß die Hermitizität ei-

nes korrespondierenden Hamiltonoperators die Unitarität der S-Matrix impliziert.

2. Diracsche Strahlungstheorie (DST)

Dirac entwickelt in seinem Aufsatz „The quantum theory of the emission and absorption of radiation“⁵ eine Theorie, die die Wechselwirkung zwischen elektromagnetischer Strahlung und Atomen für den nichtrelativistischen Fall beschreibt. In einem ersten Ansatz entwickelt er durch Analogiebetrachtungen zur Hamiltonschen Mechanik eine Quantentheorie für das ladungsfreie elektromagnetische Feld ohne Wechselwirkung mit atomaren Systemen. Er nennt diese Vortheorie eine Quantentheorie eines Ensembles, das die Bose-Einstein-Statistik erfüllt (*QTEBES*). Dirac entwickelte aus Analogieüberlegungen bezüglich der Klassischen Mechanik und der Quantenmechanik eine Quantentheorie für die Emission und Absorption von Strahlung in Materie. Im Vordergrund stand dabei, wie die Wechselwirkung zwischen einem materiellen, raumzeitlich lokalisierten System (z. B. ein atomares System oder ein molekulares System) und Strahlung quantentheoretisch beschrieben werden kann. Diracs Motivation zur Entwicklung der Strahlungstheorie ist darin zu sehen, daß er eine vereinheitlichende Theorie für folgende Teiltheorien schaffen wollte:

- Theorie für die Emission und Absorption von Strahlung durch Materie (Einstein: Photoeffekt; spontane Emission, induzierte Emission, Absorption.)
- Wellentheorie des Lichts (Interferenzeffekte).

Dirac konstruiert zunächst eine Vortheorie, in der er annimmt, daß das Strahlungsfeld als ein abstraktes System mit abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden aufgefaßt werden kann. Er geht dabei von der Vorstellung aus, daß das Strahlungsfeld in einem „großen kubischen Volumen“ eingeschlossen sei und periodische Randbedingungen für dieses Feld gelten, so daß

- das Feld durch eine Darstellung als Fourierreihe in abzählbare Komponenten zerlegbar ist,
- jede dieser Komponenten durch zwei kanonische Größen bestimmt ist, nämlich Energie und Phase, welche die Dynamik des Feldes beschreiben.

Diese beiden dynamischen Größen des Feldes können dabei über einen Link zur Quantenmechanik determiniert werden.

Jedes $i \in \mathbb{N}$ indiziere eine Komponente des Feldes und jeder Komponente korrespondiere ein Paar dynamischer Größen E und Θ , wobei bezüglich der Zeit T gilt:

- (1) $T \subseteq \mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall
- (2) $E: \mathbb{N} \times T \rightarrow \mathbb{R} \quad \wedge \quad \forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (E(i, t) > 0)$
- (3) $\Theta: \mathbb{N} \times T \rightarrow \mathbb{R} \quad \wedge \quad \forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (\Theta(i, t) > 0)$.

Um die entsprechenden Gesetze zu erhalten, zieht Dirac nun folgende Analogie zur Hamiltonschen Mechanik.

Sei die Hamilton-Funktion $H: \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times T \rightarrow \mathbb{R}$ des gesamten Systems eine Funktion der Größen Θ , E und t . Dann ergeben sich die Hamiltonschen Gleichungen in der folgenden Form:

- (1) $\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (D_t E(i, t) = -D_{\Theta(i, t)} H(\Theta(1, t), \Theta(2, t), \dots, E(1, t), E(2, t), \dots, t))$
- (2) $\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (D_t \Theta(i, t) = D_{E(i, t)} H(\Theta(1, t), \Theta(2, t), \dots, E(1, t), E(2, t), \dots, t))$.

In Analogie zum Korrespondenzprinzip der Quantenmechanik für Observable und Operatoren im Hilbertraum korrespondiere jedem $\Theta(i, t)$ und $E(i, t)$ ein Operator $\hat{\Theta}(i, t)$ und $\hat{E}(i, t)$ für die folgende Vertauschungsrelation erfüllt sein soll:

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T \left(\hat{\Theta}(i, t) \hat{E}(i, t) - \hat{E}(i, t) \hat{\Theta}(i, t) = \sqrt{-1} \frac{\hbar}{2\pi} \right).$$

Jede Komponente des Strahlungsfeldes wird als ein System interpretiert, das eine bestimmte Bewegungsrichtung und Energie hat. Diracs Methode der „Zweiten Quantisierung“ führt dazu, daß die Anzahl dieser Systeme als Größe verwendet wird, um die Dynamik des gesamten Systems zu beschreiben. Diese Methode soll im folgenden näher erläutert werden.

Dabei betrachtet man zunächst wie die Wechselwirkung zweier quantenmechanischer Systeme formalisiert werden kann. Sei \hat{H}_0 derjenige Hamiltonoperator, der der Gesamtenergie eines Systems ohne Wechselwirkung zugeordnet wird, und sei \hat{H}_1 derjenige Hamiltonoperator, der der Energie der Wechselwirkung zugeordnet wird. Man nimmt nun an, daß für den Hamiltonoperator \hat{H} , der der Gesamtenergie eines Systems mit Wechselwirkung zugeordnet wird, gilt:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1.$$

Theorem

Sei $HR = \langle V, \mathbb{C}, \langle | \rangle, \oplus, \circ, \theta \rangle$ derjenige Hilbertraum, der dem System mit

Wechselwirkung korrespondiert und $HR_0 = \langle V_0, \mathbb{C}, \langle | \rangle, \oplus, \circ, \theta \rangle$ derjenige

Hilbertraum, der dem System ohne Wechselwirkung korrespondiert.

Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathbf{y}: T \rightarrow \mathbb{C}$ eine bijektive Abbildung.

Sei $B = \{ \varphi | \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \} \subseteq V_0$ die Hilbertbasis des Hilbertraums HR_0 .

Sei $\tilde{a}: \mathbb{N} \times T \rightarrow \mathbb{C}$ eine nach t differenzierbare Abbildung.

Dann gilt: $\forall t \in T \left(\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}(i, t) \mathbf{j}(i) \right)$.⁶

$|\tilde{a}(i, t)|^2$ wird dabei interpretiert als die Wahrscheinlichkeit, daß sich das gesamte System mit Wechselwirkung zur Zeit t im Zustand $\varphi(i)$ befindet.

Nach Dirac soll für ein Ensemble von Z Systemen die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf diese Anzahl Z normiert werden, indem über die Abbildung \tilde{a} eine Abbildung $a: \mathbb{N} \times T \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird:

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (a(i, t) := \sqrt{Z} \tilde{a}(i, t)).$$

Das Betragsquadrat $N(i, t) := |a(i, t)|^2$ gibt dann die wahrscheinliche Anzahl von Systemen an, die sich zur Zeit t im Zustand $\varphi(i)$ befinden.

Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ seien $H_1(i, j)$ die Matrixelemente derjenigen Matrix, die dem Hamiltonoperator \hat{H}_1 zugeordnet wird.

Die zeitliche Änderung wird bestimmt durch folgendes Gesetz:

$$\sqrt{-1} \frac{\hbar}{2\pi} D_t a(i, t) = \sum_{j=1}^{\infty} H_1(i, j) a(j, t).$$

Das Gesetz für die komplex konjugierten Größen lautet:

$$-\sqrt{-1} \frac{\hbar}{2\pi} D_t a^*(i, t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^*(j, t) H_1(j, i).$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ und $t \in T$ werden $a(i, t)$ und $\sqrt{-1} \frac{\hbar}{2\pi} D_t a^*(i, t)$ als kanonisch konjugiert betrachtet.

Für die Hamilton-Funktion $F_1 : \mathbb{C}^\infty \times T \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\forall t \in T \left(F_1(a(1,t), a(2,t), \dots, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a^*(i,t) H_1(i,j) a(j,t) \right).$$

Es gelten folgende Gesetze:

$$(a) \quad \forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T \left(D_t a(i,t) = \frac{2\mathbf{p}}{\sqrt{-1}h} D_{a^*(i,t)} F_1(a(i,t), t) \right)$$

$$(b) \quad \forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T \left(\frac{\sqrt{-1}h}{2\mathbf{p}} D_t a^*(i,t) = -D_{a(i,t)} F_1(a(i,t), t) \right).$$

Diese Gesetze können über bestimmte Transformationen in die gewohnte Hamiltonform gebracht werden. Dabei seien für alle $i \in \mathbb{N}$ und $t \in T$ die $E(i,t)$ die Energieeigenwerte des Zustands $\varphi(i)$, wobei gilt: $\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (D_t E(i,t) = 0)$.

Eine Abbildung $b : \mathbb{N} \times T \rightarrow \mathbb{C}$ sei folgendermaßen definiert:

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (b(i,t) := a(i,t) \exp\left(-\sqrt{-1} E(i,t) t \frac{2\mathbf{p}}{h}\right)).$$

Damit folgt für die komplex konjugierten Größen:

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T (b^*(i,t) = a^*(i,t) \exp\left(\sqrt{-1} E(i,t) t \frac{2\mathbf{p}}{h}\right)).$$

Es gilt: $|b(i,t)|^2 = N(i,t)$.

Folglich gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, $t \in T$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_t b(i,t) = \\ & = E(i,t) a(i,t) \exp\left(-\sqrt{-1} E(i,t) t \frac{2\pi}{h}\right) + \\ & \quad + \sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_t a(i,t) \exp\left(-\sqrt{-1} E(i,t) t \frac{2\pi}{h}\right) = \\ & = E(i,t) b(i,t) + \sum_{j=1}^{\infty} H_1(i,j) b(j,t) \exp\left(\sqrt{-1} (E(j,t) - E(i,t)) t \frac{2\pi}{h}\right). \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\tilde{h}(i, j) := H_1(i, j) \exp\left(\sqrt{-1}(E(j, t) - E(i, t))t \frac{2\pi}{h}\right)$ folgt:

$$\sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_t b(i, t) = E(i, t) b(i, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{h}(i, j) b(j, t).$$

Mit folgenden Hilfsdefinitionen

- (1) $\mathbf{d}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} ((i = j \rightarrow \mathbf{d}(i, j) = 0) \wedge (i \neq j \rightarrow \mathbf{d}(i, j) = 1))$
 (2) $\tilde{H}(i, j) := E(i, t) \mathbf{d}(i, j) + \tilde{h}(i, j)$

erhält man:

$$\sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_t b(i, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{H}(i, j) b(j, t).$$

Man nehme an, daß $b(i, t)$ und $b^*(i, t)$ kanonisch konjugierte Größen seien.

Sei $F': \mathbb{C}^{\infty} \times T \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt folgendes Gesetz:

$$F'(b(1, t), b(2, t), \dots, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b^*(i, t) \tilde{H}(i, j) b(j, t).$$

Die Transformation auf die reellwertigen Größen $N(i, t)$ und $\Theta(i, t)$ liefert:

$$b(i, t) = (N(i, t))^{1/2} \exp\left(-\sqrt{-1} \Theta(i, t) \frac{2\mathbf{p}}{h}\right) \text{ und}$$

$$b^*(i, t) = (N(i, t))^{1/2} \exp\left(\sqrt{-1} \Theta(i, t) \frac{2\mathbf{p}}{h}\right).$$

Sei $F: \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R}^{\infty} \times T \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(N(1, t), N(2, t), \dots, \Theta(1, t), \Theta(2, t), \dots, t) =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{H}(i, j) (N(i, t))^{1/2} (N(j, t))^{1/2} \exp\left(\sqrt{-1} (\Theta(i, t) - \Theta(j, t)) \frac{2\pi}{h}\right)$$

bzw.

$$F(N(1, t), N(2, t), \dots, \Theta(1, t), \Theta(2, t), \dots, t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} E(i, t) N(i, t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{h}(i, j) (N(i, t))^{1/2} (N(j, t))^{1/2} \exp\left(\sqrt{-1} (\Theta(i, t) - \Theta(j, t)) \frac{2\pi}{h}\right)$$

wobei folgende Verknüpfungsgesetze gelten:

$$D_t N(i, t) = -D_{\Theta(i, t)} F(N(1, t), N(2, t), \dots, \Theta(1, t), \Theta(2, t), \dots, t) \text{ und}$$

$$D_t \Theta(i, t) = D_{N(i, t)} F(N(1, t), N(2, t), \dots, \Theta(1, t), \Theta(2, t), \dots, t).$$

Für den Fall eines Ensembles, das die Bose-Einstein-Statistik erfüllt, werden den kanonischen Größen b und b^* Operatoren zugeordnet, so daß die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu Gesetzen einer Quantentheorie werden. Derjenige Operator, der der Hamilton-Funktion F zugeordnet wird, soll eine „Schrödinger-Gleichung“ erfüllen.

Die probabilistische Interpretation gibt nicht nur die wahrscheinliche Anzahl der Systeme in irgendeinem Zustand an, sondern die Wahrscheinlichkeit einer gegebenen Verteilung der Systeme auf die verschiedenen Zustände.

Die entsprechende Zustandsfunktion führt zum „richtigen“ Wert für die Wahrscheinlichkeit irgendeiner Verteilung, wenn die Systeme die Einstein-Bose-Bedingung erfüllen. Man nehme an, daß $\hat{b}(i, t)$ und $\sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} \hat{b}^*(i, t)$ adjungierte Operatoren seien, welche die Quantenbedingungen erfüllen:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall t \in T (\hat{b}(i, t) \hat{b}^*(i, t) - \hat{b}^*(i, t) \hat{b}(i, t) = \hat{1})$$

und

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall t \in T (\hat{b}(i, t) \hat{b}(j, t) - \hat{b}(j, t) \hat{b}(i, t) = \hat{0})$$

und

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad \forall t \in T (\hat{b}^*(i, t) \hat{b}^*(j, t) - \hat{b}^*(j, t) \hat{b}^*(i, t) = \hat{0})$$

und

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad \forall t \in T (\hat{b}(i, t) \hat{b}^*(j, t) - \hat{b}^*(i, t) \hat{b}(j, t) = \hat{0}).$$

Damit lauten die Transformationsgleichungen in Quantenform:

$$\hat{b}(i, t) = (\hat{N}(i, t) + \hat{1})^{1/2} \exp\left(-\sqrt{-1} \hat{\Theta}(i, t) \frac{2\pi}{h}\right) = \exp\left(-\sqrt{-1} \hat{\Theta}(i, t) \frac{2\pi}{h}\right) (\hat{N}(i, t))^{1/2}$$

und

$$\hat{b}^*(i, t) = (\hat{N}(i, t))^{1/2} \exp\left(\sqrt{-1} \hat{\Theta}(i, t) \frac{2\pi}{h}\right) = \exp\left(\sqrt{-1} \hat{\Theta}(i, t) \frac{2\pi}{h}\right) (\hat{N}(i, t) + \hat{1})^{1/2}.$$

Die Anzahl der Systeme im jeweiligen Zustand sind die Eigenwerte der Operatoren $\hat{N}(i, t)$.

Derjenige Operator, der der Hamiltonfunktion F zugeordnet wird, ist der Hamiltonoperator \hat{F} :

$$\begin{aligned} \hat{F} = & \sum_{i=1}^{\infty} E(i, t) \hat{N}(i, t) + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{h}(i, j) (\hat{N}(i, t))^{1/2} (\hat{N}(j, t) + \hat{1} - \hat{d}(i, j))^{1/2} \exp\left(\sqrt{-1} (\hat{\Theta}(i, t) - \hat{\Theta}(j, t)) \frac{h}{2\mathbf{p}}\right) \end{aligned}$$

Mit der Definition für die Zustandsfunktion $\tilde{\Psi}: \mathbf{N}^{\infty} \times T \rightarrow \mathbf{C}$ lautet die zugehörige Zustandsgleichung:

$$\sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_t \tilde{\Psi}(N(1, t), N(2, t), \dots) = \hat{F} \tilde{\Psi}(N(1, t), N(2, t), \dots).$$

Für jeden Operator $\hat{\Theta}(i, t)$ existiert dabei folgender Zusammenhang mit den Größen $N(i, t)$:

$$\hat{\Theta}(i, t) = \sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_{N(i, t)}.$$

Damit ergibt sich:

$$\exp\left(\pm \sqrt{-1} \hat{\Theta}(i, t) \frac{2\mathbf{p}}{h}\right) = \exp(\mp D_{N(i, t)}).$$

Das Verknüpfungsgesetz kann demnach folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-1} \frac{h}{2\mathbf{p}} D_i \tilde{\Psi}(N(1,t), N(2,t), \dots) = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{H}(i,j) (\hat{N}(i,t))^{1/2} (\hat{N}(j,t) + \hat{1} - \tilde{\mathbf{d}}(i,j))^{1/2} \tilde{\Psi}(N(1,t), N(2,t), \dots, N(i,t)-1, \dots, N(j,t)+1, \dots) \end{aligned}$$

Dabei wird $|\tilde{\Psi}(N(1,t), N(2,t), \dots)|^2$ als Wahrscheinlichkeit für diejenige Verteilung interpretiert, bei der sich zur Zeit t $N(1,t)$ Systeme im Zustand 1, $N(2,t)$ Systeme im Zustand 2 usw. befinden.

In der folgenden Definition (D2-1) werden im strukturalistischen Rahmen über die potentiellen Modellklassen die Grundbegriffe der Quantentheorie eines Ensembles festgelegt, das die Bose-Einstein-Statistik erfüllt. Z bezeichnet dabei eine abzählbar unendliche Menge von Zuständen, in denen sich das gesamte System befinden kann. Die Elemente von Z sind abstrakte Entitäten, die nicht weiter charakterisiert werden können. T ist eine Menge von Zeitpunkten. Die bijektive Abbildung κ ordnet jedem Zustand eine natürliche Zahl zu. Die Abbildungen Θ (Phase) und N (Anzahl) sind Größen, die sich aus einer analogen Zuordnung zu den Größen Ort und Impuls der Hamiltonschen Mechanik ergeben. Die komplexwertige Abbildung $\tilde{\Psi}$ stellt die Zustandsfunktion für das gesamte System dar. Die Abbildung c_1 ordnet jedem Wert von Θ einen symmetrischen linearen Operator im zugehörigen Hilbertraum der Zustände, dem sogenannten Fock-Raum (bezeichnet mit FR) zu, entsprechend wird jedem Wert von N ein symmetrischer linearer Operator im FR zugeordnet. $\text{SLOP}_{\langle \text{FR} \rangle}$ bezeichnet dabei die Menge aller symmetrischen linearen Operatoren im FR. Die Werte von \hat{F} schließlich entstehen dadurch, daß jedem Wert von Θ und N , der in der Hamiltonfunktion F_t vorkommt, durch seinen entsprechenden Operator ersetzt wird. Die Plancksche Konstante wird mit h bezeichnet.

D2-1

x ist ein *potentielles Modell der Quantentheorie eines Ensembles, das die Bose-Einstein-Statistik erfüllt* ($x \in M_p(QTEBES)$) gdw

es gibt $Z, T, \Theta, N, F, \hat{F}, \tilde{\Psi}, h, \kappa, c_1, c_2$ so daß

- (1) $x = \langle Z, T; N, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+, \mathbf{C}; \Theta, N, F, \hat{F}, \tilde{\Psi}, h, \kappa, c_1, c_2 \rangle$
- (2) $\text{card}(Z) = \aleph_0$
- (3) $T \subseteq \mathbf{R}$ ist ein offenes Intervall
- (4) $\kappa: Z \rightarrow \mathbf{N} \wedge \kappa$ ist bijektiv
- (5) $\Theta: \mathbf{N} \times T \rightarrow \mathbf{R}^+$, so daß
 $\forall i \in \mathbf{N} \forall t \in T (z_i \in Z \rightarrow \exists D_t \Theta(\kappa(z_i), t))$
- (6) $N: \mathbf{N} \times T \rightarrow \mathbf{N}$, so daß
 $\forall i \in \mathbf{N} \forall t \in T (z_i \in Z \rightarrow \exists D_t N(\kappa(z_i), t))$

- (7) $F: (\mathbf{R}^+)^{\infty} \times \mathbf{N}^{\infty} \times T \rightarrow \mathbf{R}$, so daß $\forall i \in \mathbf{N} \forall t \in T$
 $((z_i \in Z \rightarrow \exists D_{\Theta(\kappa(z_i), t)} F(\Theta(\kappa(z_1), t), \Theta(\kappa(z_2), t), \dots, N(\kappa(z_1), t), N(\kappa(z_2), t), \dots, t))) \wedge$
 $(z_i \in Z \rightarrow \exists D_{N(\kappa(z_i), t)} F(\Theta(\kappa(z_1), t), \Theta(\kappa(z_2), t), \dots, N(\kappa(z_1), t), N(\kappa(z_2), t), \dots, t))))$
- (8) $\tilde{\Psi}: \mathbf{N}^{\infty} \times T \rightarrow \mathbf{C}$, so daß
 $\forall i \in \mathbf{N} \forall t \in T (z_i \in Z \rightarrow \exists D_t \tilde{\Psi}(N(\kappa(z_1), t), N(\kappa(z_2), t), \dots, t))$
- (9) $c_1: \text{Rge}(\Theta) \rightarrow \text{SLOP}_{\langle \text{FR} \rangle}$
- (10) $c_2: \text{Rge}(N) \rightarrow \text{SLOP}_{\langle \text{FR} \rangle}$
- (11) $\hat{F}: (\text{Rge}(c_1))^{\infty} \times (\text{Rge}(c_2))^{\infty} \rightarrow \text{SLOP}_{\langle \text{FR} \rangle}$
- (12) $h \in \mathbf{R}^+$

Für die Modelle der Quantentheorie eines Ensembles, das die Bose-Einstein-Statistik erfüllt, sind drei Gesetze relevant. Die ersten beiden Gesetze (D2-2 (3)) sind Gleichungen, die in Analogie zu den Hamiltonschen Gleichungen der klassischen Mechanik gebildet werden. Das dritte Gesetz (D2-2 (4)) ist eine Art „Schrödinger-Gleichung“, die über die abstrakten Entitäten Phase Θ und Anzahl N gebildet wird.

D2-2

x ist ein Modell der Quantentheorie eines Ensembles, das die Bose-Einstein-Statistik erfüllt ($x \in M(QTEBES)$) gdw

es gibt $Z, T, \Theta, N, F, \hat{F}, \tilde{\Psi}, h, \kappa, c_1, c_2$ so daß

- (1) $x = \langle Z, T; \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+, \mathbf{C}; \Theta, N, F, \hat{F}, \tilde{\Psi}, h, \kappa, c_1, c_2 \rangle$
- (2) $x \in M_p(QTEBES)$
- (3) $\forall t \in T \forall i \in \mathbf{N} (z_i \in Z \rightarrow$
 $(D_{\hat{E}(\kappa(z_i), t)} F(\Theta(\kappa(z_1), t), \dots, N(\kappa(z_1), t), \dots, t)) = -D_t N(\kappa(z_i), t) \wedge$
 $D_{N(\kappa(z_i), t)} F(\Theta(\kappa(z_1), t), \dots, N(\kappa(z_1), t), \dots, t)) = D_t \Theta(\kappa(z_i), t)))$
- (4) $\forall t \in T \forall i \in \mathbf{N} (z_i \in Z \rightarrow \sqrt{-1} \frac{h}{2\pi} D_t \tilde{\Psi}(N(\kappa(z_1), t), N(\kappa(z_2), t), \dots, t)) =$
 $= (\hat{F}(c_1(\Theta(\kappa(z_1), t)), c_1(\Theta(\kappa(z_2), t)), \dots, c_2(N(\kappa(z_1), t)), c_2(N(\kappa(z_2), t)), \dots)) \tilde{\Psi}(N(\kappa(z_1), t), \dots, t))$

Um die Wechselwirkung eines atomaren Systems mit Strahlung zu berücksichtigen, werden folgende Grundbegriffe benötigt, die im potentiellen Modell der Diracschen Strahlungstheorie (DST) definiert werden. P ist eine nichtleere, endliche Menge von Partikeln des atomaren Systems. Z ist wie in D2-1 (2) eine abzählbar unendliche Menge von Zuständen. T bezeichnet eine Menge von Zeitpunkten. Die bijektiven Abbildungen $\tilde{\kappa}$ bzw. κ ermöglichen eine Numerierung von Partikeln bzw. Zuständen. m ist eine Mas-

senfunktion für die Partikel. Θ und N stellen wie in *D2-1* (5) und (6) die dynamischen Größen für das Strahlungsfeld dar. Ψ ist die komplexwertige Zustandsfunktion für das gesamte wechselwirkende System. Die Abbildung O_D ordnet jedem Wert von Θ einen Differentiationsoperator zu, der die Anzahl der entsprechenden Zustände verringert („Vernichtungsoperator“), während O_p jedem Wert von N einen Projektionsoperator zuordnet, der die Anzahl der entsprechenden Zustände erhöht („Erzeugungsoperator“). H ist der Hamiltonoperator in Matrix-Form für das atomare System. Die Amplitude des elektrischen Feldes wird durch A repräsentiert. σ ist die Polarisation der Strahlung und v die Frequenz der Strahlung. Das zugehörige Dipolmoment wird mit l bezeichnet. c ist die Lichtgeschwindigkeit und h die Plancksche Konstante. A, σ, v, l und c sind dabei Größen, die der klassischen Elektrodynamik⁷ zuzuordnen sind, während die Zustandsfunktion Ψ als *DST*-theoretische Größe aufzufassen ist.

D2-3

x ist ein *potentielles Modell der Diracschen Strahlungstheorie* ($x \in M_p(DST)$) gdw

es gibt $n, P, Z, T, \mathbf{k}, \mathbf{k}, m, \Theta, N, \Psi, O_D, O_p, H, A, \mathbf{s}, \mathbf{n}, l, h, c$ so daß

- (1) $x = \langle P, Z, T; N, N_n, R, R^+, C; \mathbf{k}, \mathbf{k}, m, \Theta, N, \Psi, O_D, O_p, H, A, \mathbf{s}, \mathbf{n}, l, h, c \rangle$
- (2) $\text{card}(P) = n$
- (3) $\text{card}(Z) = \aleph_0$
- (4) $T \subseteq \mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall
- (5) $\tilde{\kappa} : N_n \rightarrow P \wedge \tilde{\kappa}$ ist bijektiv
- (6) $\kappa : Z \rightarrow N \wedge \kappa$ ist bijektiv
- (7) $m : P \rightarrow \mathbb{R}^+$
- (8) $\Theta : N \times T \rightarrow \mathbb{R}^+$
- (9) $N : N \times T \rightarrow N$
- (10) $\Psi : N \times (\text{Rge}(N))^\infty \rightarrow \mathbb{C}$
- (11) O_D ist eine Funktion, die jedem $\Theta(i, t)$ einen Differentiationsoperator zuordnet
- (12) O_p ist eine Funktion, die jedem $N(i, t)$ einen Projektionsoperator zuordnet
- (13) $H : \text{Rge}(m) \times N^2 \rightarrow \mathbb{C}$
- (14) $A : N \times T \rightarrow \mathbb{R}$
- (15) $\sigma : N \rightarrow \mathbb{R}^+$
- (16) $v : N \rightarrow \mathbb{R}^+$
- (17) $l : N \rightarrow \mathbb{R}^+$
- (18) $c \in \mathbb{R}^+$
- (19) $h \in \mathbb{R}^+$

In der folgenden Definition *D2-4* werden die Modelle der *DST* festgelegt. *D2-4* (3) ist ein Gesetz dafür, wie die Amplitude des elektrischen Feldes im wesentlichen mit den dynamischen Größen Θ und N verknüpft ist. *D2-4* (4) gibt die zeitliche Entwicklung des gesamten Systems an. Auf der rechten Seite der Gleichung kann man dabei drei Terme identifizieren. Der erste Term $\sum_{k=1}^n H_{m(\mathbf{k}(k))}(j', j'')$ wird dem atomaren System zugeordnet, der zweite Term $\sum_{i=1}^{\infty} (\hbar \mathbf{n}(\mathbf{k}(z_i))) O_p(N(\mathbf{k}(z_i), t))$ dem (wechselwirkungsfreien) Strahlungsfeld und der dritte Term schließlich beschreibt die Wechselwirkung zwischen dem atomaren System und dem Strahlungsfeld.

D2-4

x ist ein *Modell der Diracschen Strahlungstheorie* ($x \in M(DST)$) gdw

es gibt $n, P, Z, T, \mathbf{K}, \mathbf{k}, m, \Theta, N, \Psi, O_D, O_p, H, A, \mathbf{s}, \mathbf{n}, l, h, c$ so daß

$$(1) \quad x = \langle P, Z, T; N, N_n, R, R^+, C; \mathbf{K}, \mathbf{k}, m, \Theta, N, \Psi, O_D, O_p, H, A, \mathbf{s}, \mathbf{n}, l, h, c \rangle$$

$$(2) \quad x \in M_p(DST)$$

$$(3)$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall t \in T \left(z_i \in Z \rightarrow A(\mathbf{k}(z_i), t) = 2 \left(\frac{\hbar \mathbf{n}(\mathbf{k}(z_i))}{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}(\mathbf{k}(z_i))} \right)^{\frac{1}{2}} (N(\mathbf{k}(z_i), t))^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{2\mathbf{p} \cdot \Theta(\mathbf{k}(z_i), t)}{h} \right) \right)$$

$$(4)$$

$$\begin{aligned} & \forall t \in T \forall j' \in \mathbb{N} \forall j'' \in \mathbb{N} (z_j \in \mathbb{N} \rightarrow \\ & \sqrt{-1} \frac{\hbar}{2\mathbf{p}} D_t \Psi(j', N(\mathbf{k}(z_1), t), \dots) = \sum_{j'' \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=1}^n H_{m(\mathbf{k}(k))}(j', j'') + \sum_{i=1}^{\infty} (\hbar \mathbf{n}(\mathbf{k}(z_i))) O_p(N(\mathbf{k}(z_i), t)) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\hbar}{2\mathbf{p}} \right)^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{n}(\mathbf{k}(z_i))}{\mathbf{s}(\mathbf{k}(z_i))} \right) l(\mathbf{k}(z_i)) \left((O_p(N(\mathbf{k}(z_i), t)))^{\frac{1}{2}} \right) \exp \left(\frac{2\mathbf{p} \cdot \sqrt{-1} O_D(\Theta(\mathbf{k}(z_i), t))}{h} \right) \right) + \\ & \left. + (O_p(N(\mathbf{k}(z_i), t)) + O_p(1))^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{2\mathbf{p} \cdot \sqrt{-1} O_D(\Theta(\mathbf{k}(z_i), t))}{h} \right) \right) \Psi(j'', N(\mathbf{k}(z_1), t), \dots) \end{aligned}$$

3. S-Matrix-Theorie (SMT)⁸

Im Weiteren soll erläutert werden, wie ein Basis-Theorieelement für *SMT* definiert werden kann. Für dieses Theorieelement benötigt man folgende Grundbegriffe. P ist eine Menge von Partikeln, wobei man davon ausgehen kann, daß mit diesem Begriff eher Partikel-„Typen“ festgelegt werden sollen als „massive“ Partikel, da Masse nicht als Grundbegriff in dieser Theorie verwendet wird. Als zweite Basismenge findet man eine Menge T von ge-

nau zwei Zeitpunkten, etwa t_1 und t_2 . Es handelt sich also um eine Art „abstrakte“ Streutheorie, welche die Wechselwirkung zweier physikalischer Systeme erklären bzw. systematisieren sollte. Dabei bezeichnet t_1 den Zeitpunkt vor der Wechselwirkung und t_2 den Zeitpunkt nach der Wechselwirkung. Maßgebend ist für diese Theorie, daß nur „beobachtbare“ Größen verwendet werden. Man findet hier also eine ähnliche positivistische Grundlage, die bereits bei der Entwicklung der Matrizenmechanik zu einer anerkannten Theorie führte. Einer der relationalen Grundbegriffe der *SMT* wird „Kanal“ (bezeichnet mit ch) genannt, der eine bestimmte Teilmenge von Partikeltypen charakterisiert. Man unterscheidet dabei bezüglich der Zeit zwei Kanäle: Bezüglich t_1 einen Eingangskanal und in Bezug auf t_2 einen Ausgangskanal. Zu jedem Zeitpunkt können wiederum N verschiedene Typen von Kanälen differenziert werden. Als „Streuung“ kann man dann den Übergang eines Eingangskanals vom Typ i zum Ausgangskanal vom Typ j bezeichnen. Dabei werden folgende Arten von Streuungen unterschieden:

- **Elastische Streuung:**
Sie ist dadurch charakterisiert, daß der Eingangskanal identisch ist mit dem Ausgangskanal.
- **Inelastische Streuung:**
Sie ist durch die Verschiedenheit von Eingangs- und Ausgangskanal gekennzeichnet. Daraus ergeben sich zwei Möglichkeiten:
 - (1) Die Partikel des Eingangskanals haben einen anderen „inneren“ Zustand (Quantenzustand) als die Partikel des Ausgangskanals, oder
 - (2) die Partikel des Eingangskanals sind verschieden von den Partikeln des Ausgangskanals (Zerfallsreaktion).

Die zentrale Entität der *S*-Matrix kann demnach als eine komplexwertige Abbildung S definiert werden. Weitere Grundbegriffe sind einerseits die Geschwindigkeit v der Partikel und andererseits der aus der Raumgeometrie bekannte Raumwinkel Ω . Der letzte Grundbegriff ist der Wirkungsquerschnitt w , der charakterisiert wird als Anzahl der Streuungen eines bestimmten Typs pro Zeit dividiert durch die Anzahl der Partikel des Eingangskanals pro Fläche und Zeit.

D3-1:

x ist ein *potentielles Modell der S-Matrix-Theorie* ($x \in M_p(SMT)$) gdw

es gibt $P, T, t_1, t_2, ch, S, v, \Omega, w$ so daß

$$(1) \quad x = \langle P, T; N, R, C; ch, S, v, \Omega, w \rangle$$

- (2) $P \neq \emptyset$ und P ist endlich
- (3) $T = \{t_1, t_2\} \wedge t_1 \neq t_2$
- (4) $ch: N \times T \rightarrow \text{Pot}(P)$ und $2 \leq \text{card}(Rge(ch))$
- (5) $S: ch_{t_1} \times ch_{t_2} \rightarrow C$
- (6) $v: P \times T \rightarrow R^3$
- (7) Ω ist ein Raumwinkel
- (8) w ist ein Wirkungsquerschnitt

Für die Modelle der S-Matrix-Theorie kann man ein empirisches Gesetz (D3-2 (3)) identifizieren. Dieses Gesetz bedeutet, daß die Ableitung des Wirkungsquerschnitts nach dem Raumwinkel im wesentlichen über das Betragsquadrat der S-Matrix bestimmt wird.

D3-2:

x ist ein *Modell der S-Matrix-Theorie* ($x \in M(SMT)$) gdw

es gibt $P, T, ch, S, v, \Omega, w$ so daß

- (1) $x = \langle P, T; N, R, C; ch, S, v, \Omega, w \rangle$
- (2) $x \in M_p(SMT)$
- (3) $\forall i \in N (p_i \in P \rightarrow D_3(w(ch_{t_1}, ch_{t_2}, \Omega)) = \frac{v_{t_2}(p_i)}{v_{t_1}(p_i)} |S(ch_{t_1}, ch_{t_2})|^2)$

Anmerkungen

- ¹ Zum strukturalistischen Ansatz s. Balzer, Moulines, Sneed (1987).
- ² Vgl. Born, Heisenberg, Jordan (1926).
- ³ Vgl. Miller (1994), S. 3.
- ⁴ Heisenberg (1943), S. 513.
- ⁵ Dirac (1927).
- ⁶ In Standard-Lehrbüchern der Quantentheorie wird dies als „Störungstheorie“ bezeichnet.
- ⁷ Für eine strukturalistische Rekonstruktion der klassischen Elektrodynamik s. Bartelborth (1988).
- ⁸ Für weitere wissenschaftstheoretische Untersuchungen zu diesem Forschungsprogramm s. Cushing (1982) und Cushing (1990).

Literatur

Balzer, W., Moulines, C. U., Sneed, J. (1987): *An Architectonic for Science*, Dordrecht.

- Bartelborth, T. (1988): *Eine logische Rekonstruktion der klassischen Elektrodynamik*, Frankfurt a. Main.
- Born, M., Heisenberg, W., Jordan, P. (1926): Zur Quantenmechanik II, in: *Zeitschrift für Physik* 35, S. 557 - 615.
- Cushing, J. (1982): Models and Methodologies in current theoretical High-energy Physics, in: *Synthese* 50, S. 5 - 101.
- Cushing, J. (1990): *Theory construction and selection in modern physics: the S Matrix*, Cambridge.
- Dirac, P. A. M. (1927): The quantum theory of emission and absorption of radiation, in: *Proceedings of the Royal Society of London A* 117, S. 243 – 265.
- Heisenberg, W. (1943): Die ‚beobachtbaren Größen‘ in der Theorie der Elementarteilchen, in: *Zeitschrift für Physik* 120, S. 513 – 538.
- Miller, A. I. (1994): *Early Quantum Electrodynamics*, Cambridge.